ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. siječnja 2017.

7. razred - rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. $\frac{8x+13}{3}=\frac{19-12x}{2}-\left(16x-\frac{7-4x}{6}\right)$

$\frac{8x+13}{3}=\frac{19-12x}{2}-16x+\frac{7-4x}{6}$ $/\cdot 6$ 1 BOD

$2\cdot(8x+13)=3\cdot(19-12x)-96x+7-4x$ 1 BOD

$16x+26=57-36x-96x+7-4x$ 1 BOD

$16x+36x+96x+4x=57+7-26$

$152x=38$ $/:152$ 1 BOD

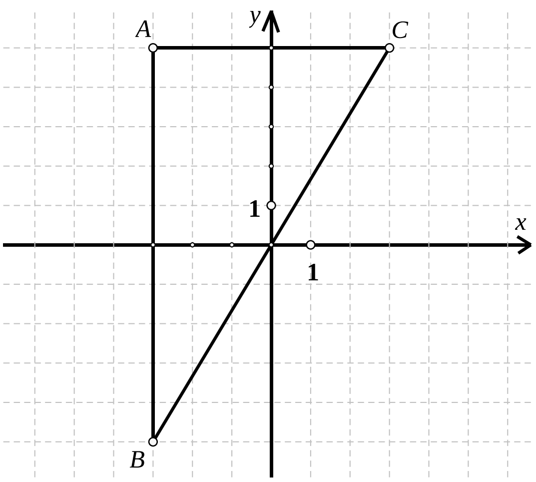
$x=\frac{38}{152}$ 1 BOD

$x=\frac{1}{4}$ 1 BOD

………………………………………………………………………..…. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik nije do kraja skratio razlomak, rješenje vrjednovati s 5, a ne 6 bodova.

2. Skica: 1 BOD



Koordinate traženih točaka su $A(-3, 5)$, $B(-3, -5)$ i $C(3, 5)$. 3 BODA

Trokut ABC je pravokutni trokut s katetama duljina 6 i 10 jediničnih dužina. 1 BOD

Površina mu je 30 jediničnih kvadrata. 1 BOD

….…………………………………………………………………….…... UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: U cijelosti bodovati točno rješenje samo s brojevima, bez navođenja jediničnih dužina ili jediničnih kvadrata.

3. Prvi način:

Označimo prvi broj s x, a drugi broj s y. Tada vrijedi: $(x+y):(x-y):\frac{x}{y}=20:4:1$.

Prema tome, postoji racionalan broj k takav da vrijedi:

$x+y=20k$, $x-y=4k$ i $\frac{x}{y}=k$. 1 BOD

Zbrojimo li jednakosti $x + y = 20k$ i $x - y = 4k$ dobit ćemo:

$2x = 24k$, odnosno $x = 12k$. 1 BOD

Sada imamo $12k + y = 20k$, pa je $y = 8k$. 1 BOD

Iz $\frac{x}{y} = k$ slijedi $\frac{12k}{8k} = k$, odnosno $k = 1.5$. 1 BOD

Sada je $x = 12 \cdot 1.5 = 18$, 1 BOD

i $y = 8 \cdot 1.5 = 12$. 1 BOD

Traženi brojevi su 18 i 12.

……………………………………………………………………………….……...…… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Označimo prvi broj s x, a drugi broj s y. Tada vrijedi: $(x + y) : (x - y) : \frac{x}{y} = 20 : 4 : 1$.

Iz $(x + y) : (x - y) = 20 : 4$ slijedi $4x + 4y = 20x - 20y$, $16x = 24y$, $x = 1.5y$. 2 BODA

Iz $(x + y) : \frac{x}{y} = 20 : 1$ slijedi $x + y = 20 \cdot \frac{x}{y} = 20 \cdot \frac{1.5y}{y} = 30$. 1 BOD

Iz $(x - y) : \frac{x}{y} = 4 : 1$ slijedi $x - y = 4 \cdot \frac{x}{y} = 4 \cdot \frac{1.5y}{y} = 6$. 1 BOD

Zbrajanjem $x + y = 30$ i $x - y = 6$, dobiva se $2x = 36$, tj. $x = 18$. 1 BOD

Tada je $y = 30 - x = 30 - 18 = 12$. 1 BOD

Traženi brojevi su 18 i 12.

…………………………………………………………………………….……… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Označimo prvi broj s x, a drugi broj s y. Tada vrijedi: $(x + y) : (x - y) : \frac{x}{y} = 20 : 4 : 1$.

Iz $(x + y) : (x - y) = 20 : 4$, tj. $(x + y) : (x - y) = 5 : 1$, redom slijedi

$x + y = 5x - 5y$, $4x = 6y$, odakle je $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$. 2 BODA

Iz $(x + y) : \frac{3}{2} = 20 : 1$ slijedi $x + y = 20 \cdot \frac{3}{2} = 30$. 1 BOD

Iz $(x - y) : \frac{3}{2} = 4 : 1$ slijedi $x - y = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$. 1 BOD

Zbrajanjem $x + y = 30$ i $x - y = 6$, dobiva se $2x = 36$, tj. $x = 18$. 1 BOD

Tada je $y = 30 - x = 30 - 18 = 12$. 1 BOD

Traženi brojevi su 18 i 12.

…………………………………………………………………………….……… UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

Neka je n broj ispita koje je Marko do sada pisao, a x zbroj postignutih bodova na njima.

Iz uvjeta zadatka se vidi da je:

$\frac{x+89}{n+1} = 91$, $\frac{x+64}{n+1} = 86$ 1 BOD

Iz obje jednadžbe se izrazi x:

$x = 91 \cdot (n + 1) - 89$ i $x = 86 \cdot (n + 1) - 64$ 1 BOD

Izjednače se desne strane:

$91 \cdot (n + 1) - 89 = 86 \cdot (n + 1) - 64$ 1 BOD

$91n + 91 - 89 = 86n + 86 - 64$

$91n + 2 = 86n + 22$

$91n - 86n = 22 - 2$

$5n = 20$ 1 BOD

$n = 4$ 1 BOD

Marko je do sada pisao 4 ispita. 1 BOD

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Neka je n ukupan broj ispita koje Marko piše (one do sada i još jedan koji tek slijedi),

a x zbroj postignutih bodova na dosadašnjim ispitima.

Iz uvjeta zadatka se vidi da je:

$\frac{x+89}{n} = 91$, $\frac{x+64}{n} = 86$ 1 BOD

Iz obje jednadžbe se izrazi x:

$x = 91n - 89$ i $x = 86n - 64$ 1 BOD

Izjednače se desne strane:

$91n - 89 = 86n - 64$ 1 BOD

$91n - 86n = 89 - 64$

$5n = 25$ 1 BOD

$n = 5$ 1 BOD

Ne računajući ispit koji tek slijedi, Marko je do sada pisao $5 - 1 = 4$ ispita. 1 BOD

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

5. Prvi način:

Iz $a_1 : a_2 = 3 : 2$ može se zaključiti da postoji koeficijent proporcionalnosti k

takav da je $a_1 = 3k$ i $a_2 = 2k$. 1 BOD

Onda je $o_1 = 4a_1 = 12k$ i $o_2 = 4a_2 = 8k$. 1 BOD

Iz $o_1 - o_2 = 24$ slijedi $12k - 8k = 24$, odnosno $4k = 24$ pa je $k = 6$. 1 BOD

Tada su $a_1 = 18$ cm i $a_2 = 12$ cm. 1 BOD

Površine kvadrata su $p_1 = a_1 \cdot a_1 = 324$ cm^2 i $p_2 = a_2 \cdot a_2 = 144$ cm^2. 2 BODA

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Uvjeti zadatka su: $o_1 - o_2 = 24$, $a_1 : a_2 = 3 : 2$.

Iz $a_1 : a_2 = 3 : 2$ dobivamo $2a_1 = 3a_2$, tj. $a_1 = 1.5a_2$. 1 BOD

Koristeći $o_1 - o_2 = 24$, odnosno $4a_1 - 4a_2 = 24$ dobiva se redom: 1 BOD

$6a_2 - 4a_2 = 24$, $2a_2 = 24$, tj. $a_2 = 12$ cm. 1 BOD

Tada je $a_1 = 1.5 \cdot 12 = 18$ cm. 1 BOD

Površine kvadrata su $p_1 = a_1 \cdot a_1 = 324$ cm^2 i $p_2 = a_2 \cdot a_2 = 144$ cm^2. 2 BODA

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Uvjeti zadatka su: $o_1 - o_2 = 24$, $a_1 : a_2 = 3 : 2$.

Iz $a_1 : a_2 = 3 : 2$ dobivamo $2a_1 = 3a_2$, tj. $a_1 = 1.5a_2$. 1 BOD

Iz $o_1 - o_2 = 24$, odnosno $4a_1 - 4a_2 = 24$ redom dobivamo $a_1 - a_2 = 6$, 1 BOD

$1.5a_2 - a_2 = 6$, $0.5a_2 = 6$, tj. $a_2 = 12$ cm. 1 BOD

Tada je $a_1 = 1.5 \cdot 12 = 18$ cm. 1 BOD

Površine kvadrata su $p_1 = a_1 \cdot a_1 = 324$ cm^2 i $p_2 = a_2 \cdot a_2 = 144$ cm^2. 2 BODA

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Četvrti način:
Ako se opsezi kvadrata razlikuju za 24 cm, to znači da se duljine njihovih stranica razlikuju za 6 cm. 1 BOD

Možemo pisati $a_1 - a_2 = 6$, odnosno $a_1 = a_2 + 6$ 1 BOD

Uvrstimo dobiveni izraz u zadani omjer $a_1 : a_2 = 3 : 2$, dobivamo

$(a_2 + 6) : a_2 = 3 : 2$, tj. $2 \cdot (a_2 + 6) = 3 \cdot a_2$, odnosno $2a_2 + 12 = 3a_2$ 1 BOD

Tada je $a_2 = 12$ cm i $a_1 = 18$ cm. 1 BOD

Površine kvadrata su $p_1 = a_1 \cdot a_1 = 324 \text{ cm}^2$ i $p_2 = a_2 \cdot a_2 = 144 \text{ cm}^2$. 2 BODA

………………………………………………..…………………………….…… UKUPNO 6 BODOVA

6. Prvi način:
Neka je cijena miksera x kuna. Tada je cijena usisivača $x + 30$ kuna. 1 BOD

Mikser je snižen 5 %, pa je cijena nakon sniženja $0.95x$ kn, a usisavač je snižen 10 %, pa je cijena usisivača nakon sniženja jednaka $0.9 \cdot (x + 30)$ kn. 2 BODA

Vrijedi $0.95x + 0.9 \cdot (x + 30) = 360$. 2 BODA

$0.95x + 0.9x + 27 = 360$ 1 BOD

$1.85x = 333 \quad / : 1.85$ 1 BOD

$x = 180$ 1 BOD

Cijena miksera je bila 180 kuna, a usisivača 210 kuna. 2 BODA

……………………………………………………………………...…………. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:
Neka je m = cijena miksera, u = cijena usisavača.

Mikser je jeftiniji 30 kn pa vrijedi da je $m = u - 30$. 1 BOD

Mikser je snižen 5 %, pa je cijena nakon sniženja $0.95m$, a usisavač je snižen 10 %, pa je cijena nakon sniženja $0.9u$. 2 BODA

Vrijedi $0.95m + 0.9u = 360$, 1 BOD

$0.95(u - 30) + 0.9u = 360$ 1 BOD

$0.95u - 28.5 + 0.9u = 360$ 1 BOD

$1.85u = 388.5$ 1 BOD

$u = 210$ 1 BOD

$m = 210 - 30 = 180$ 1 BOD

Cijena miksera prije sniženja bila je 180 kn, a usisavača 210 kn. 1 BOD

…………………..…………………………………………...……….…. UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:
Prvo se izračuna ukupan broj svih mogućih načina sjedenja: Na prvo mjesto može sjesti bilo tko od 7 osoba, na drugo bilo tko od 6 preostalih, na treće bilo tko od 5 preostalih i tako dalje… Na posljednje mjesto može sjesti samo posljednja preostala osoba. Ukupno postoji $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ rasporeda kako djeca mogu sjesti na klupu. 2 BODA

Neka na krajevima sjede dva dječaka. Njih četvorica se na ta dva mjesta mogu rasporediti na $4 \cdot 3 = 12$ načina, a onda ostalih 5 osoba mogu sjesti bilo gdje, što mogu napraviti na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina.
Ukupno ima $12 \cdot 120 = 1440$ rasporeda u kojima su na krajevima dva dječaka. 2 BODA

Na krajevima mogu biti i djevojčice. Njih 3 se mogu na ta dva mjesta rasporediti na $3 \cdot 2 = 6$ načina, što zajedno sa 120 rasporeda ostalih 5 osoba daje $6 \cdot 120 = 720$ mogućnosti kako da djeca sjednu na klupu, uz dvije djevojčice na krajevima. 2 BODA

Zajedno ima $1440 + 720 = 2160$ rasporeda djece u kojima na krajevima sjede osobe istoga spola. Vjerojatnost da se to dogodi je $2160:5040=\frac{3}{7}=0.428571...\approx 43\,\%$ 2 BODA

Vjerojatnost da na krajevima budu osobe različitog spola je $\frac{4}{7}=0.571428...\approx 57\,\%$ 1 BOD

Vjerojatnije je da će na krajevima klupe biti osobe različitog spola. 1 BOD

……………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Prvo se izračuna ukupan broj svih mogućih načina sjedenja: Na prvo mjesto može sjesti bilo tko od 7 osoba, na drugo bilo tko od 6 preostalih, na treće bilo tko od 5 preostalih i tako dalje… Na posljednje mjesto može sjesti samo posljednja preostala osoba. Ukupno postoji $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$ rasporeda kako djeca mogu sjesti na klupu. 2 BODA

Na krajevima će biti osobe različitog spola ako je na početku dječak, a na kraju djevojčica ili obrnuto, na početku djevojčica, a na kraju dječak. Broj takvih rasporeda je $4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$. Ako uzmemo u obzir da u oba slučaja ostalih 5 osoba mogu sjesti bilo gdje (što daje 120 rasporeda), ukupan broj načina na koji djeca mogu sjediti, a da na krajevima budu osobe različitog spola, je $24 \cdot 120 = 2880$. 4 BODA

Vjerojatnost da se to dogodi je $2880:5040=\frac{4}{7}=0.571428...\approx 57\,\%$ 2 BODA

Vjerojatnost da na krajevima budu osobe istoga spola je onda $\frac{3}{7}=0.428571...\approx 43\,\%$ 1 BOD

Vjerojatnije je da će na krajevima klupe biti osobe različitog spola. 1 BOD

……………………………………………………………………........……. UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Promatramo samo dva krajnja mjesta na klupi. Na jedno od krajnjih mjesta može sjesti bilo koja od 7 osoba, a na drugo netko od preostalih 6 osoba. Ta dva krajnja mjesta mogu se popuniti na $7 \cdot 6 = 42$ načina. 1 BOD

Na krajevima će biti osoba istoga spola ako se radi o dva dječaka ili o dvije djevojčice. Četvorica dječaka mogu na dva mjesta sjesti na $4 \cdot 3 = 12$ načina, a tri djevojčice na $3 \cdot 2 = 6$ načina.
Ukupno ima 18 rasporeda u kojima na krajevima klupe sjede osobe istoga spola. 2 BODA

Na krajevima klupe će biti osobe različitih spolova ako je primjerice na lijevoj strani netko od 4 dječaka, a na desnoj neka od 3 djevojčice (postoji $4 \cdot 3 = 12$ takvih rasporeda) ili obrnuto, lijevo djevojčice, a desno dječaci (također $3 \cdot 4 = 12$ rasporeda).
Postoji 24 rasporeda u kojima su na krajevima klupe osobe različitih spolova. 2 BODA

Vjerojatnost da na krajevima budu osobe istoga spola je

$18:42=\frac{3}{7}=0.428571...\approx 43\,\%$. 2 BODA

Vjerojatnost da na krajevima budu osobe različitog spola je

$24:42=\frac{4}{7}=0.571428...\approx 57\,\%$ 2 BODA

Vjerojatnije je da će na krajevima biti osobe suprotnog spola. 1 BOD

……………………………………..…………………………...…...….. UKUPNO 10 BODOVA