ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE
26. siječnja 2017.

5. razred-rješenja

OVDJE SU DANI NEKI NAČINI RJEŠAVANJA ZADATAKA. UKOLIKO UČENIK IMA DRUGAČIJI POSTUPAK RJEŠAVANJA, ČLAN POVJERENSTVA DUŽAN JE I TAJ POSTUPAK BODOVATI I OCIJENITI NA ODGOVARAJUĆI NAČIN.

1. Prvi način:

Zadatak riješimo primjenom distributivnosti, odnosno izlučivanjem zajedničkog faktora:

$78 \cdot 35 \cdot 379 + 78 \cdot 35 + 78 \cdot 35 \cdot 620 - 2000 \cdot 39 \cdot 34 =$

$= 78 \cdot 35 \cdot 379 + 78 \cdot 35 \cdot 1 + 78 \cdot 35 \cdot 620 - 2000 \cdot 39 \cdot 34 =$

$= 78 \cdot 35 \cdot (379 + 1 + 620) - 2000 \cdot 39 \cdot 34 =$ 2 BODA

$= 78 \cdot 35 \cdot 1000 - 2000 \cdot 39 \cdot 34 =$ 1 BOD

$= 35 \cdot 78000 - 78000 \cdot 34 =$ 1 BOD

$= 78000 \cdot (35 - 34) =$ 1 BOD

$= 78000$ 1 BOD

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

$78 \cdot 35 \cdot 379 + 78 \cdot 35 + 78 \cdot 35 \cdot 620 - 2000 \cdot 39 \cdot 34 =$

$= 2730 \cdot 379 + 2730 + 2730 \cdot 620 - 78000 \cdot 34 =$ 1 BOD

$= 1034670 + 2730 + 1692600 - 2652000 =$ 2 BODA

$= 1037400 + 1692600 - 2652000 =$ 1 BOD

$= 2730000 - 2652000 =$ 1 BOD

$= 78000$ 1 BOD

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Zadatak riješimo primjenom distributivnosti, odnosno izlučivanjem zajedničkog faktora:

$78 \cdot 35 \cdot 379 + 78 \cdot 35 + 78 \cdot 35 \cdot 620 - 2000 \cdot 39 \cdot 34 =$

$= 78 \cdot 35 \cdot (379 + 1 + 620) - 2000 \cdot 39 \cdot 34 =$ 2 BODA

$= 2 \cdot 39 \cdot 35 \cdot 1000 - 2000 \cdot 39 \cdot 34 =$ 1 BOD

$= 2000 \cdot 39 \cdot 35 - 2000 \cdot 39 \cdot 34 =$ 1 BOD

$= 2000 \cdot 39 \cdot (35 - 34) =$ 1 BOD

$= 78000$ 1 BOD

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

2. Prvi način:

Od ukupnog broja sličica oduzmemo Markove i Petrove sličice i dobijemo koliko zajedno imaju Ivan, Igor i Matija: $463 - 217 = 246$ 2 BODA

Kako Ivan i Igor imaju dvostruko više sličica od Matija, znači da Ivan, Igor i Matija zajedno imaju trostruko više od Matije: $246 : 3 = 82$ 3 BODA

Matija ima 82 sličice. 1 BOD

………………………………………………………………………………. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

	broj sličica
Marko	a
Petar	b
Ivan	c
Igor	d
Matija	e

Iz uvjeta zadatka slijede jednakosti:

$a + b = 217$

$c + d = 2 \cdot e$ 2 BODA

Uvrštavanjem u početnu jednakost $a + b + c + d + e = 463$ dobijemo:

$217 + 2 \cdot e + e = 463$ 1 BOD

$217 + 3 \cdot e = 463$

$3 \cdot e = 463 - 217$

$3 \cdot e = 246$

$e = 246 : 3$

$e = 82$ 2 BODA

Matija ima 82 sličice. 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Neka je x broj sličica koje je skupio Matija.

Tada su Ivan i Igor skupili $2x$ sličica. 1 BOD

Iz uvjeta zadatka vrijedi

$x + 2x + 217 = 463$ 2 BODA

$3x + 217 = 463$

$3x = 463 - 217$

$3x = 246$ 1 BOD

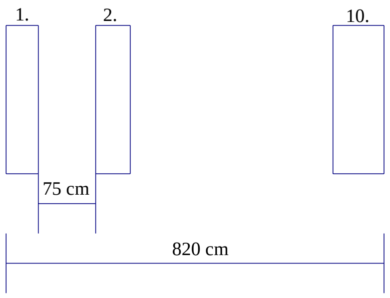
$x = 246 : 3 = 82$ 1 BOD

Matija ima 82 sličice. 1 BOD

…………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

3. Prvi način:

Skica:



10 stupova – 9 razmaka 1 BOD

Ukupna duljina svih razmaka je:

$9 \cdot 75 = 675$ cm 1 BOD

Ako od udaljenosti od početka prvog do kraja 10. stupa oduzmemo ukupnu duljinu svih razmaka dobijemo ukupnu širinu svih stupova:

$820 - 675 = 145$ cm 1 BOD

Zbrojimo širine svih stupova:

širina 1. stupa

širina 2. stupa jednaka je širini 1. stupa + 1 cm

širina 3. stupa jednaka je širini 1. stupa + 2 cm

⋮

širina 10. stupa jednaka je širini 1. stupa + 9 cm

Ukupna širina svih stupova iznosi 10 širina 1. stupa + 45 cm.

$145 - 45 = 100$ cm 1 BOD

10 širina 1. stupa jednaka je 100 cm pa je širina 1. stupa 10 cm. 1 BOD

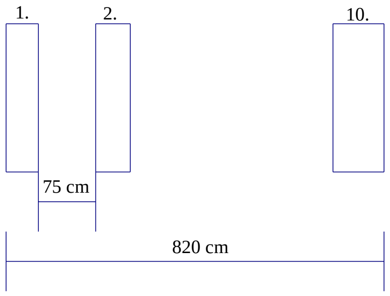
$10 + 6 = 16$ cm

Širina sedmog stupa iznosi 16 cm. 1 BOD

…………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Skica:



10 stupova – 9 razmaka 1 BOD

Ukupna duljina svih razmaka je:

$9 \cdot 75 = 675$ cm 1 BOD

Ako od udaljenosti od početka prvog do kraja 10. stupa oduzmemo ukupnu duljinu svih razmaka dobijemo ukupnu širinu svih stupova:

$820 - 675 = 145$ cm 1 BOD

Zbrojimo širine svih stupova:

širina 1. stupa x

širina 2. stupa $x+1$

širina 3. stupa $x+2$

⋮

širina 10. stupa $x+9$

Ukupna širina svih stupova iznosi $x+x+1+x+2+...+x+9=10x+45$. 1 BOD

$10x + 45 = 145$

$10x = 100$

$x = 10$ cm 1 BOD

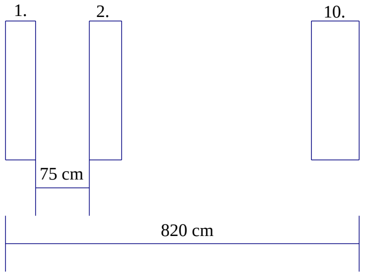
$x + 6 = 10 + 6 = 16$ cm

Širina sedmog stupa iznosi 16 cm. 1 BOD

……………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

Treći način:

Skica:



Neka je x širina najužeg (prvog) stupa.

10 stupova – 9 razmaka 1 BOD

Iz uvjeta zadatka vrijedi

$9 \cdot 75 + x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4 + x + 5 + x + 6 + x + 7 + x + 8 + x + 9 = 820$ 1 BOD

$675 + 10x + 45 = 820$ 1 BOD

$10x + 720 = 820$

$10x = 100$ 1 BOD

$x = 10$ 1 BOD

Širina najužeg stupa je 10 cm, a sedmog stupa 16 cm (10 + 6). 1 BOD

………………………………………………………………………..……… UKUPNO 6 BODOVA

4. Prvi način:

Kako su brojevi 14 i 18 parni, a brojevi nasuprot njima prosti, zaključujemo da zbroj na nasuprotnim stranama mora biti neparan. 1 BOD

Nasuprot broju 35 mora biti paran broj, a jedini paran prost broj je 2. 2 BODA

Zbroj brojeva na nasuprotnim stranama je uvijek 37 (35 + 2). 1 BOD

Nasuprot broju 14 nalazi se 37 – 14 = 23, a nasuprot broju 18 nalazi se 37 – 18 = 19. 2 BODA

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Zbroj dvaju brojeva na nasuprotnim stranama kocke mora biti veći od 35 jer je najveći vidljivi broj 35. 1 BOD

Neka je x broj koji se nalazi nasuprot broju 14.

Mora biti $x + 14 > 35$, tj. $x > 21$. 1 BOD

Prvi prost broj veći od 21 je 23.

Ako se nasuprot broju 14 nalazi se broj 23, tada zbroj dvaju brojeva na nasuprotnim stranama kocke iznosi 14 + 23 = 37. 1 BOD

Nasuprot broju 18 tada se nalazi broj 37 – 18 = 19 i on je prost. 1 BOD

Provjera: 37 – 35 = 2, nasuprot broju 35 nalazi se najmanji prosti broj 2.

Kako je broj 2 jedini paran prost broj, nema drugih rješenja. 1 BOD

Dakle, nasuprot broju 14 nalazi se 23, a nasuprot broju 18 nalazi se 19. 1 BOD

……………………………………………………………………………….. UKUPNO 6 BODOVA

Napomena: Ako učenik napiše točno rješenje bez ikakvih dodatnih razmatranja i objašnjenja, učenikovo rješenje vrednovati s 3 boda.

5. Prvi način:

Za prvih 9 stranica potrebno je 9 znamenki. 1 BOD

Za stranice od 10. do 99. potrebno je $2 \cdot 90 = 180$ znamenki. 1 BOD

Stranica s troznamenkastim brojem stranica ima najviše 900, a za njih je potrebno najviše $3 \cdot 900 = 2700$ znamenki. 1 BOD

Kako je $9 + 180 + 2700 = 2889$, što premašuje zadani broj, troznamenkastih stranica ima manje od 900. Neka ih ima x.

Za stranice s troznamenkastim rednim brojem potrebno je $3x$ znamenki. 1 BOD

Tada za numeriranje knjige treba $9 + 180 + 3x$ znamenki, što je broj djeljiv s 3. 1 BOD

Broj 2017 nije djeljiv s 3 jer mu je zbroj znamenki jednak 10. Stoga knjiga ne može biti numerirana s 2017 znamenki. 1 BOD

……………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

Drugi način:

Za prvih 9 stranica potrebno je 9 znamenki. 1 BOD

Za stranice od 10. do 99. potrebno je $2 \cdot 90 = 180$ znamenki. 1 BOD

Stranica s troznamenkastim brojem stranica ima najviše 900, a za njih je potrebno najviše $3 \cdot 900 = 2700$ znamenki. 1 BOD

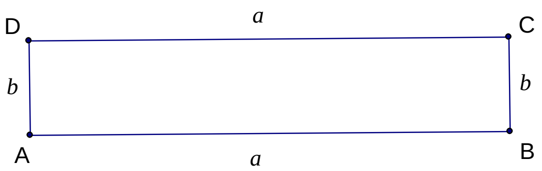
Kako je $9 + 180 + 2700 = 2889$, što premašuje zadani broj, troznamenkastih stranica eventualno ima manje od 900.

Za označavanje stranica jednoznamenkastim i dvoznamenkastim brojevima treba $180 + 9 = 189$ znamenaka, a za označavanje stranica troznamenkastim brojevima preostaje $2017 - 189 = 1828$ znamenaka. 2 BODA

No, broj 1828 nije djeljiv brojem 3 (jer je zbroj njegovih znamenaka 19) pa označavanje stranica knjige s točno 2017 znamenaka nije moguće. 1 BOD

……………………………………………………………………………..…… UKUPNO 6 BODOVA

6.

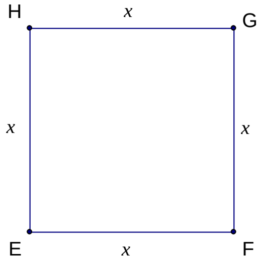


Neka je a duljina stranice pravokutnika $ABCD$ tj. $a = 42$ cm $= 420$ mm. 1 BOD

Duljina druge stranice je $b = 420 : 5 = 84$ mm. 1 BOD

Opseg zadanog pravokutnika je:

$o(ABCD) = 2 \cdot (420 + 84) = 2 \cdot 504 = 1008$ mm 3 BODA



Opseg kvadrata *EFGH* je 3 puta manji od opsega pravokutnika pa vrijedi:

o(EFGH) = 1008 : 3 = 336 mm 2 BODA

Duljina stranice kvadrata je 336 : 4 = 84 mm. 1 BOD

Površina kvadrata iznosi 84 · 84 = 7056 mm^2. 2 BODA

…………………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

7. Prvi način:

Prirodni broj je djeljiv sa 72 ako je djeljiv i s 8 i s 9. 2 BODA

Prirodni broj je djeljiv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8. 1 BOD

Prirodni broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj svih znamenaka djeljiv s 9. 1 BOD

Prvi prirodni broj veći od 201700 djeljiv s 8 je 201704 jer je 201700 : 8 = 25212 i ostatak 4.

1 BOD

Svi pogodni dvoznamenkasti završetci su dani u tablici: 2 BODA

dvoznamenkasti završetak (djeljivost s 8)	broj	zbroj znamenaka (djeljivost s 9)	
04	201704	14	
12	201712	13	
20	201720	12	
28	201728	20	
36	201736	19	
44	**201744**	**18**	2 BODA
52	201752	17	
60	201760	16	
68	201768	24	
76	201776	23	
84	201784	22	
92	201792	21	

Traženi šesteroznamenkasti broj je 201744. 1 BOD

…………………………………………………………………………...……. UKUPNO 10 BODOVA

Drugi način:

Prirodni broj je djeljiv sa 72 ako je djeljiv i s 8 i s 9. 2 BODA

Prirodni broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj svih znamenaka djeljiv s 9. 1 BOD

Prirodni broj je djeljiv s 8 ako mu je troznamenkasti završetak djeljiv s 8. 1 BOD

Neka je traženi broj oblika $\overline{2017ab}$.

Zbroj znamenaka tog broja je 2 + 0 + 1 + 7 + a + b = 10 + a + b.

Da bi traženi broj bio djeljiv brojem 9 zbroj a + b mora imati vrijednost 8 ili 17. 1 BOD

Svi pogodni dvoznamenkasti završetci su dani u tablici: 2 BODA

zbroj znamenaka (djeljivost s 9)	broj	troznamenkasti završetak (djeljivost s 8)	
08	201708	nije djeljiv s 8	
17	201717	neparan	
26	201726	nije djeljiv s 8	
35	201735	neparan	
44	**201744**	**djeljiv s 8**	2 BODA
53	201753	neparan	
62	201762	nije djeljiv s 8	
71	201771	neparan	
80	201780	nije djeljiv s 8	
89	201789	neparan	
98	201798	nije djeljiv s 8	

Traženi šesteroznamenkasti broj je 201744. 1 BOD

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA

Treći način:

Podijelimo najmanji šesteroznamenkasti broj kojemu su prve četiri znamenke 2, 0, 1 i 7, tj. broj 201700 sa 72: 2 BODA

201700 : 72 = 2801 2 BODA

577

100

28

Prvi višekratnik broja 72 veći od 201700 je broj $2802 \cdot 72 = 201744$. 2 BODA

Sljedeći višekratnik broja 72 je broj $201744 + 72 = 201816$ koji nije traženog oblika. 2 BODA

Traženi dvoznamenkasti završetak je 44, a šesteroznamenkasti broj je 201744. 2 BODA

……………………………………………………………………..……. UKUPNO 10 BODOVA